数理解析研究所講究録
961巻 1996年 183-189

The Continued Fraction Expansion of α with $\mu(\alpha)=3$

by

安富　真一

鈴鹿高専一般科目

1 Introduction

無理数αに対して$\mu(\alpha)$ を次のように定義する.

$$\frac{1}{\mu(\alpha)}=\liminf_{q\rightarrow\infty}q\parallel q\alpha\parallel,$$

ここで $q\in \mathbf{Q}$ とし、また $\parallel x\parallel=\min_{i\in \mathbf{Z}}|x-i|$

A.Markoff [5] は, $\mu(\alpha)<3$ なるα及び、$\mu(\alpha)$ の分布を調べた. $\{\mu(x)\mid x\in \mathbf{R}\}$ は、Lagrange spectrum と呼ばれている.

定理 **A(A.Markoff[5])** *3* より小さいLagrange spectrum は、 $\{\sqrt{9m^{2}-4}/m\}$ となる、ここで m は、自然数で以下の関係式を満たす. ある自然数 m_{1} , m_{2}が存在して

$$m^{2}+m_{1}^{2}+m_{2}^{2}=3mm_{1}m_{2}, \quad m_{1}\leq m, \ m_{2}\leq m. \tag{1}$$

またuを、$mod\ m$ で$\pm m_{1}/m_{2}$ と合同な基本剰余系の元とし、また、自然数vを$v=\frac{u^{2}+1}{m}$で定義する. Markoff 形式とよばれる2次形式 $f_{m}(x,y)$ を以下のように定義しよう.

$$f_{m}(x,y)=mx^{2}+(3m-2u)xy+(v-3u)y^{2}, \tag{2}$$

このとき、α を $f_{m}(x,1)=0$ の根とすると

$$\mu(\alpha)=\sqrt{9m^{2}-4}/m. \tag{3}$$

逆に、$\mu(\beta)<3$であれば、あるMarkoff形式が存在しその根とβは対等になる. ここで2つの実数p,qが対等であるとは、整数a,b,c,dが, 存在し、$ad-bc\pm 1$であり、

$$q=\frac{aq+b}{cq+d},$$

が成立することである.

H.Cohn [1] は、Bernoulli 列と呼ばれる数列を用いて、Markoff 形式の根の連分数展開に関するある表現を与えた.

$[a_{0},a_{1},a_{2},\cdots]$ を以下のように通常の連分数展開を表すとする.

$$[a_{0},a_{1},a_{2},\cdots]=a_{0}+\cfrac{1}{a_{1}+\cfrac{1}{a_{2}+\cfrac{1}{a_{3}+\ddots}}}.$$

また、 $W(a,b)$ を記号 a 及び b から構成される、有限単語あるいは右側無限単語からなる集合とする. また、 a 及び b が自然数のとき, 任意の $W = W_0W_1\cdots (W_i \in \{a,b\})$ 対して、$[W] \in \mathbf{R}$ を次のように定義する.

$$[W] = [0, W_0, W_1, W_2, \cdots] = 0 + \cfrac{1}{W_0 + \cfrac{1}{W_1 + \cfrac{1}{W_2 + \ddots}}}$$

単語 w と自然数 m に対して w_m を、

$$w_m = \underbrace{w\cdots w}_{m \text{ times}}.$$

と定義する.

H.Cohn [1] の結果は以下の通りである.

定理 B(H.Cohn[1]) 任意のMarkoff形式 $f_m(x,y)$ に対して互いに素な非負整数の組 (r,s) が存在して $f_m(x,1) = 0$ の根は、次の連分数で表された数に対等である.

$$[1_2 2_{2k(1)} 1_2 2_{2k(2)} \cdots 1_2 2_{2k(n)} \cdots],$$

ここで、

$$k(i) = \lfloor \frac{is}{r} \rfloor - \lfloor \frac{(i-1)s}{r} \rfloor,$$

Bernoulli 列呼ばれる、右側無限列 $H(x)$ を以下のように定義しよう.

$$H(x) = G(x,1)G(x,2)\cdots \quad ,$$

ここで、

$$G(x,n) = \lfloor nx \rfloor - \lfloor (n-1)x \rfloor.$$

また、両側無限列 $G(x)$ を以下のように定義する.

$$G(x) = \cdots G(x,-1)G(x,0)G(x,1)G(x,2)\cdots \quad .$$

また、W(0,1) からW(1,2) への準同型変換 ϕ を以下のように定義する.

$$\phi : \begin{cases} 0 \to 11, \\ 1 \to 22. \end{cases}$$

今まで、用意した用語を使えば、定理 Bは、次のようになる.

定理 C(H.Cohn [1]) 任意の $x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$ に対して、

$$\mu([\phi(H(x))]) < 3.$$

逆に, $\mu(\alpha) < 3$ であれば、ある $x \in \mathbf{Q} \cap [0,1]$ が存在して、α は $[\phi(H(x))]$ に対等である.

Bernoulli 列 $H(x)$, を用いてH.Cohn [2] は、さらに $\mu = 3$ なる場合を探求した.

定理 D(H.Cohn [2]) 任意の無理数 $x \in [0,1]$ に対して

$$\mu([\phi(H(x))]) = 3.$$

しかしながら、$\mu(\alpha)=3$を満たすαを十分多く表現しているとはいえない. [7] で示されている例をあげよう. 自然数列$u_0, u_1, \cdots$を$\lim_{k\to\infty} u_k = \infty$ を満たす数列とする. $w \in W(0,1)$ を以下のように定義する:

$$w = 0_{u_0}10_{u_1}1\cdots.$$

このとき
例([7])

$$\mu([\phi(w))]) = 3.$$

もちろん、上の例は、定理Dの数列で表現できるものではない. 我々の目的は、$\mu(\alpha)=3$を満たすαをできるだけ多く表現できる表現形式を提示しようというものである. この目的のためにBernoulli列の拡張を行う. 若干の言葉の定義をしよう. 自然数Nに対してF_N をN位のFarey分割とする. すなわち、

$$F_N = \{\frac{p}{q} \mid (p,q)=1,\ p,q \in \mathbf{Q},\ 0 \le \frac{p}{q} \le 1,\ \ 1 \le q \le N\}.$$

また、有理数 $x = n/m \neq 0$ $(n,m)=1$ に対して、$\underline{G(x)} \in W(0,1)$ を定義しよう. uを、$u = \max\{y \in F_m \mid y < x\}$とする. また、$k$を$u$の分母とする.

$$\underline{G(x)} = \cdots G(x,-1)G(x,0)G(u,1)\cdots G(u,k)G(x,1)G(x,2)\cdots.$$

また、同様に、有理数$x = n/m \neq 1$ $(n,m)=1$ に対して、 $\overline{G(x)}$ を以下のように定義する.

$$\overline{G(x)} = \cdots G(x,-1)G(x,0)G(u,1)\cdots G(u,k)G(x,1)G(x,2)\cdots,$$

ここで $u = \min\{y \in F_m \mid y < x\}$ 及び k は、uの分母とする.

$C, D \in W(a,b)$ に対して、C がDのsubword (部分単語)であるとは、$E, F \in W(a,b)$が存在して$D = ECF$ と表されることとする.

$S \in W(a,b)$ を右側または両側無限単語とする. 自然数Nに対して$D_S(N)$ 及び $D'_S(N)$ を次のように定義しよう.

$$\begin{aligned} D_S(N) &= \{p \in W(a,b) \mid p \text{ は} S\text{の sub word}\quad \text{および } \mid p \mid = N\}, \\ D'_S(N) &= \{p \in W(a,b) \mid p \text{ は無限に} S\text{に現れる かつ } \mid p \mid = N\}, \end{aligned}$$

ここで $\mid p \mid$ は、pに含まれるletter a, bの個数とする.

$x, y \in [0,1]$ 及び $x \le y$ に対して$S \in W(0,1)$が以下の条件(1)-(4)の一つを満たすとき、 (x,y)に関するsuper Bernoulli 列と呼ぶことにする.

(1) 任意の自然数Nに対して $\quad D'_S(N) = \bigcup_{z\in[x,y]} D_{G(z)}(N),$

(2) 任意の自然数Nに対して $\quad x \in \mathbf{Q}$ 及び

$$D'_S(N) = \bigcup_{z\in[x,y]} D_{G(z)}(N) \bigcup D_{\underline{G(x)}}(N),$$

(3) 任意の自然数Nに対して, $\quad y \in \mathbf{Q}$ 及び

$$D'_S(N) = \bigcup_{z\in[x,y]} D_{G(z)}(N) \bigcup D_{\overline{G(y)}}(N),$$

(4) 任意の自然数Nに対して $x,y\in\mathbf{Q}$ 及び

$$D'_S(N) = \bigcup_{z\in[x,y]} D_{G(z)}(N)\bigcup D_{\underline{G(x)}}(N)\bigcup D_{\overline{G(y)}}(N).$$

もしSが(i) $(1\le i\le 4)$番目の条件を満足しているとすると、S は type i に属するsuper Bernoulli 列と呼ばれる. 我々の主結果は以下の通りである.

定理 3 $\alpha\in\mathbf{R}$を$\mu(\alpha)\le 3$を満たすとする. $[a_0,a_1,\cdots]$ を αの連分数展開とする. このとき、ある自然数nが存在して、任意の自然数 $m\ge n$ 対して$a_m\in\{1,2\}$, であり、またあるx,y ($0\le x\le y\le 1$) が存在して(x,y)に対するsuper Bernoulli 列S が存在して、任意の自然数 Nに対して

$$D'_A(N)=D'_{\phi(S)}(N),$$

ここで $A=a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots$. 逆に任意の$(x,y)$ ($0\le x\le y\le 1$) に対する(x,y) super Bernoulli S 及び $A\in W(1,2)$で任意の自然数Nに対して,

$$D'_A(N)=D'_{\phi(S)}(N).$$

であれば、

$$\mu([A])\le 3,$$

また、等号が成り立たないのは、$x=y$ 及び x が有理数でS が *type* 1のsuper Bernoulli 列であるときに限る.

定理の最後の部分は 定理 C に他ならない. また、一般的には$A=\phi(S)$ とならないのであるが、このことについては、次の命題がある.

命題 1 $\alpha\in\mathbf{R}$を$\mu(\alpha)\le 3$を満たすとする. $[a_0,a_1,\cdots]$ をαの連分数展開とする. 今、ある定数C が存在して、任意の自然数 k,lに対して, $a_k=a_{k+1}=\cdots=a_{k+l}$ であれば、$l<C$とする. このとき、ある自然数nが存在してすべての $m\ge n$ に対して$a_m\in\{1,2\}$ であり、またある(x,y)に関した、super Bernoulli 列$S\in W(0,1)$ が存在して、

$$\phi(S)=a_na_{n+1}a_{n+2}\cdots.$$

2 証明に関して

詳しくは、[8] に譲るが、メインになる、定理や補題を述べよう. Markoff spectrum のケースにおいては、条件$\mu(\alpha)<3$から、α の連分数展開それぞれの局所おいて強い規制を与えた. それは、α の連分数展開のdigit に関する組み合わせ的な命題となる. 詳しくは、[3] のChapter 2を参照してもらいたい. その技術と同様の方法を用いると、$\mu(\alpha)\le 3$なるα の連分展開のdigit に関する局所的な結果を得ることができる. それが以下の定理1である.

定理 1 $A\in W(1,2)$ を次のようであるとする:

$$A=a_0a_1\cdots=1_{p(0)}2_{p(1)}1_{p(2)}2_{p(3)}\cdots\in W(1,2),$$

ここで 各$p(i)$ は偶数である. このとき$\mu([A])\le 3$ が成立するのは次の条件を満たすときである: 任意の偶数 $N>4$に対して, ある自然数mが存在して任意の$n>m$に対して, $a_na_{n+1}\cdots a_{n+N-1}$ は、次の場合の

うちのひとつを満足する.
場合 *1* 2222 が $a_n a_{n+1} \cdots a_{n+N-1}$ に現れないとすると、このとき $a_n a_{n+1} \cdots a_{n+N-1}$ 次のどれかに一致する.

$$1_{2r(0)};$$

又は

$$1_{2r(0)} 2_2 1_{2r(1)} 2_2 \cdots 2_2 1_{2r(k)} 2_2 1_{2r(k+1)}; \qquad (4)$$

ここで $r(0)$ 及び $r(k+1)$ 非負整数であり、$r(i)(1 \le i \le k)$ は、自然数で次の性質 *(A)* 及び *(B)* を満たす:
(A) 任意の i, j ($1 \le i, j \le k$) に対して $| r(i) - r(j) | \le 1$ 及び $r(0), r(k+1) \le \max_{1 \le i \le k}\{r(i)\}$.
(B) もし

整数 i (i $1 \le i < k$), に対して $\delta := r(i+1) - r(i) = \pm 1$

このとき次が成立する:
もしある整数 $j > 0$ に対して $r(i+1+j) - r(i-j) \neq 0$ 及び任意の自然数 k $(0 < k < j)$ に対して $r(i+1+k) - r(i-k) = 0$, このとき $r(i+1+j) - r(i-j) = -\delta$.
場合 *2* 1111 が $a_n a_{n+1} \cdots a_{n+N-1}$ にあらわれないとすると、場合 *1* と同様なことが成立する.

定理 1 における有限数列は、実は、Bernoulli 列(の一部)となる. このことを、表現したのが次の定理 2 である.

定理 2 $A \in W(1,2)$ を次のような右側無限単語とする:

$$A = a_0 a_1 \cdots = 1_{p(0)} 2_{p(1)} 1_{p(2)} 2_{p(3)} \cdots \in W(1,2),$$

ここで $p(i)$ $(i = 0, 1, \cdots)$ は、正偶数とする. また、$S = \phi^{-1}(A) = s_0 s_1 \cdots$, ここで $s_i \in \{0,1\}$ とする. $\mu([A]) \le 3$ であるための必要十分条件は: 任意の自然数 N に対して, ある自然数 m が存在して $n \ge m$ であれば, $s_n s_{n+1} \cdots s_{n+N-1}$ はある $x \in [0,1]$ に対する $G(x)$ の部分単語となる.

このように、局所的には、Bernoulli 列となる. おおざっぱに言えば、局所的に Bernoulli 列となるのが、super Bernoulli 列となる. その際 $G(x)$ の部分単語から x をどれだけ、決定できるかが問題になる. それを示したのが、次の補題である.

補題 1 $S \in W(0,1)$ とする. このとき、次の不等式が成り立つ:

$$| E_S | \le \frac{2}{| S |}.$$

ここで

$$E_S = \{x \in [0,1] \mid S \text{ は} G(x) \text{ の部分単語} \}.$$

これら Bernoulli 列の解析を進める上で [4] で展開された理論は基本的である。

3 Super Bernoulli 列 について

Super Bernoulli 列の定義では、その存在が明確ではないが、任意の $x, y (0 \ge x \ge y \ge 1)$ に対する Super Bernoulli 列が存在する.

命題 2 $x, y \in [0,1] (x \leq y)$ に対して *type* (1) の super Bernoulli 列が存在する. もし x が有理数であれば. このとき *type* (2) のsuper Bernoulli 列も存在する. もし y が有理数であれば, このとき *type* (3) のsuper Bernoulli 列も存在する. また x *and* y どちらも有理数であれば, このとき *type* (4) のsuper Bernoulli 列も存在する.

またBernoulli列は、Strumian列とも呼ばれ、一般的にそのcomplexityは、$n+1$となる. ここで、単語Sのcomplexity $P_S()$ とは、次のように定義される. 自然数nに対して、

$$P_S(n) = \sharp D_S(n).$$

super Bernoulli 列に関しては、そのcomplexityは、様々で、(x, y)やtypeからは、決定できないが、p^*complexityは、計算できる. ここでp^*complexity: $P_S^*()$は次のように定義される. (この概念は、田村純一氏によって導入された.) 自然数nに対して、

$$P_S^*(n) = \sharp D'_S(n).$$

命題 3 $x, y \in [0,1]$ $(x \leq y)$. S を(x, y)に関する*super Bernoulli* 列 とする. このとき, 自然数 N,

$$P_S^*(N) = \begin{cases} N+1+\sum_{i=1}^{N} F(x,y;i) & \text{もし } x < y, \\ N+1 & \text{もし } x = y \text{ 及び } x \text{ が無理数}, \\ \begin{cases} N+1 & \text{もし } N \leq m-1, \\ m & \text{もし } N \geq m \end{cases} & \text{もし } x = y \text{ 及び } x \text{ が有理数}, \end{cases} \tag{5}$$

ここで

$$F(x,y;i) = \sharp\{q \in \mathbf{Q} \mid x < q < y, \text{ 及び } q \text{ の分母} \leq i\}.$$

及び、mは、xが有理数のときの分母.

他のtypeの場合も同様に計算できるが省略する。

参考文献

[1] H.Cohn:Representation Markoff's binary quadratic forms by geodistics on a perforated toris,Acta Arith.18,125-136(1971)

[2] H.Cohn,Some direct limits of primitive homotopy words and of Markoff geodesics, Discontinuous Groups and Rieman surfaces Proc.1973,Univ. of Maryland Conf., Annals of Math. Studies, vol.79,Princeton,(1974), 91-98.

[3] T.W.Cusick and M.E.Flahive,The Markov and Lagrange spectra, ,Mathmatical Surveys and Monographs 30, American Mathematical Society,Providence,(1989)

[4] S.Ito and S.Yasutomi, On continued fraction, substitution and characteristic sequences $[nx+y] - [(n-1)x+y]$,Japan. J. Math.16(1990),287-306.

[5] A.A.Markoff, Sur les formes quadratiques binaries indefinites , Math.Ann 15(1879),381-409, II, Math. Ann.17(1880),379-400

[6] Perron:Die Lehre von den Kettenbrüchen I,Teubner,Stuttgart,(1954)

[7] A.M.Rocket,P.Szüsz:Continued fractions, World Scientific (1992)

[8] S.Yasutomi: The continued fraction expansion of α with $\mu(\alpha) = 3$, preprint

鈴鹿工業高等専門学校
一般科目
安富真一